Csillagászati észlelés gyakorlat I.
Hőmérsékleti sugárzás

Bőgner Rebeka & Császár Anna

Max Planck a hőmérsékleti sugárzás leírásával 1900-ban megalapozta a kvantumfizikát. Korábban már több összefüggés is ismert volt a jelenséggel kapcsolatban: Stefan-Boltzmann-törvény, Wien-féle eltolódási törvény, Rayleigh-Jeans-törvény, Wien közelítés, stb. Planck a statisztikus fizikát használva olyan törvényt vezetett le, mely megoldotta az ún. ultraibolya-katasztrófát (a klasszikus fizika ismerte a Rayleigh-Jeans közelítést, azonban ha az minden hullámhosszra igaz, akkor az intenzitás minden határon túl nőne, ha a hullámhossz nullához közelít, ellentétben a megfigyelésekkel), és az addig ismert összefüggéseket is visszaadta. Ehhez viszont azt a feltevést kellett tennie, hogy az energia nem vehet fel akármilyen tetszőleges értéket, csak egy diszkrét skála szerinti értékek lehetnek ($h\nu$ többszörösei).

1. Planck-függvény

A Planck-függvény az ún. feketetest-sugárzást írja le. A feketetest egyfajta ideális sugárzó, mely nem veri vissza vagy szórja a rá eső fényt, hanem teljes egészében elnyeli, majd kisugározza azt. Ilyen a valóságban nem létezik, azonban rengeteg objektum viselkedik (közel) feketetestként. A feketetest-sugárzás csak a test hőmérsékletétől függ, a test alakjától, anyagától, összetételétől független.

A spektrális energiasűrűség hőmérséklet- és frekvenciafüggése termikus egyensúlyban (végtelen kiterjedés, homogén hőmérséklet-eloszlás) levő közegre:

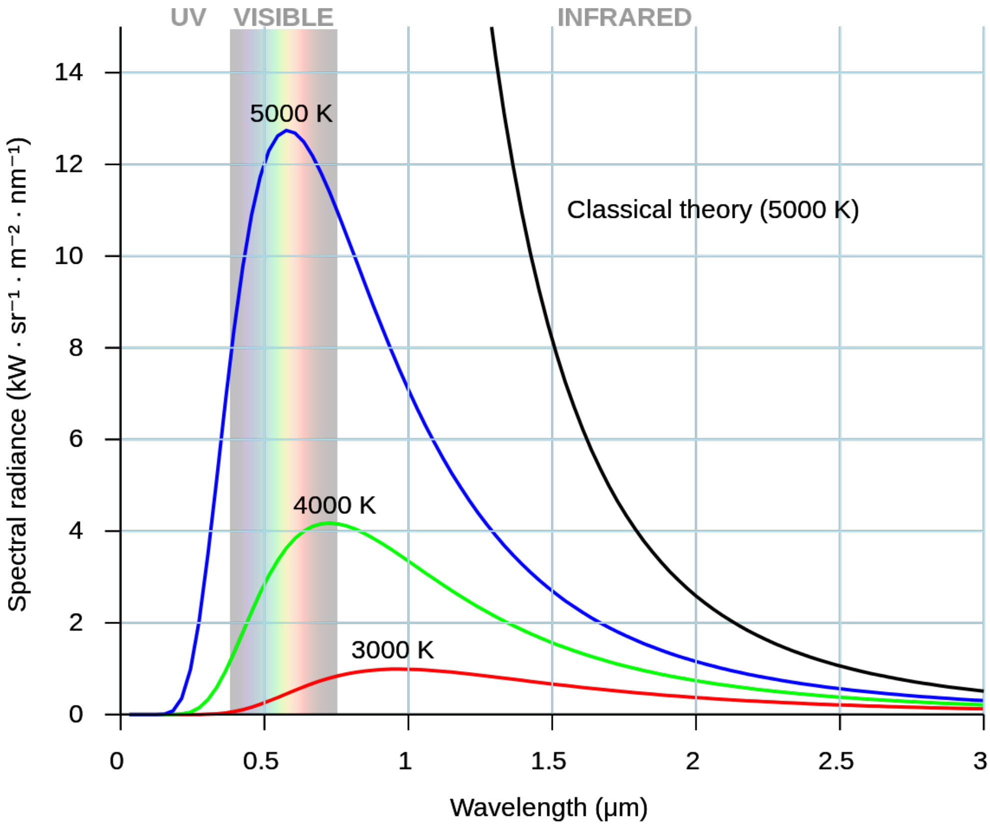
$$u_\nu(T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \tag{1}$$

A spektrális energia-sűrűség hőmérséklet- és hullámhosszfüggése:

$$u_\lambda(T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{h}{\lambda kT}} - 1} \tag{2}$$

Az intenzitás és a sugárzás energiasűrűségének kapcsolata:

$$u_\nu = \frac{1}{c} \int I_\nu d\omega \tag{3}$$



1. ábra. Forrás: https://en.wikipedia.org/

A spektrális intenzitás hőmérséklet- és frekvenciafüggése:

$$I_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\,\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} \tag{4}$$

A spektrális intenzitás hőmérséklet- és hullámhosszfüggése (lásd: 2. ábra):

$$I_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5}\,\frac{1}{e^{\frac{h}{\lambda kT}}-1} \tag{5}$$

2. Stefan-Boltzmann-törvény

$$F = \int_0^\infty \mathrm{d}\nu \int \mathrm{d}\Omega\ I_\nu \cos(\theta), \tag{6}$$

ahol $\mathrm{d}\Omega = \sin(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$ gömbi polárkoordinátákban. Az integrálások elvégzése után a (7)-es egyenletet kapjuk:

$$F = \sigma T^4, \tag{7}$$

ahol

$$\sigma = \frac{2k^4\pi^5}{15c^2h^3} \equiv const = 5,67 \times 10^{-8}\ W\ m^{-2}\ K^{-4}$$

.

A törvényből kapunk összefüggést a csillag luminozitására és hőmérsékletére:

$$F = \frac{L}{4\pi R_*^2} \quad \rightarrow \quad L = 4\pi R_*^2 \sigma T^4 \tag{8}$$

3. Wien-féle eltolódási törvény

A (5)-ös egyenlet hullámhossz szerinti deriválásával kapjuk a Wien-féle eltolódási törvényt:

$$\lambda_{max} \cdot T = 2897 \ \mu m \ K \tag{9}$$

4. Rayleigh-Jeans-törvény

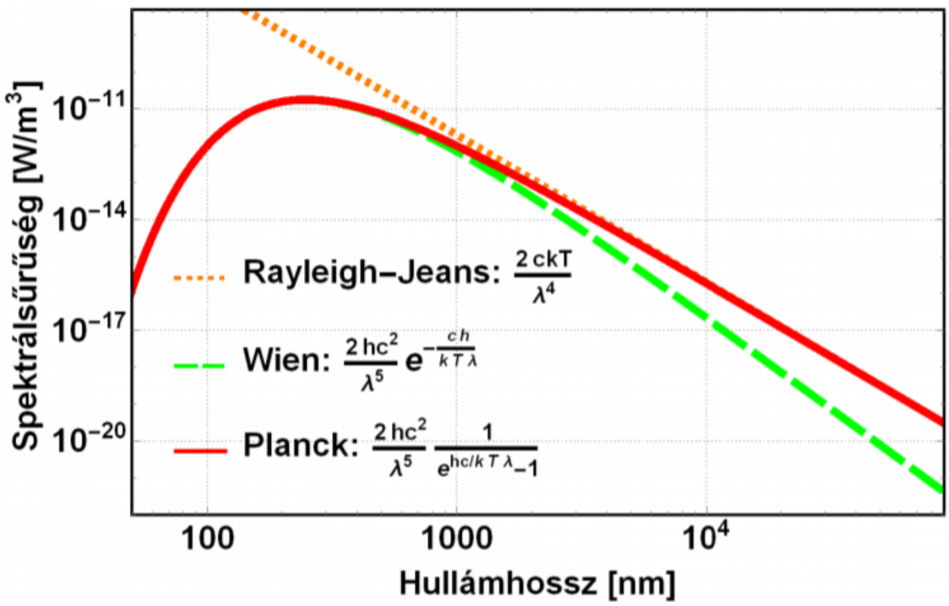
A Rayleigh-Jeans-törvényt a Planck-függvény hosszú hullámhosszakra, illetve kis frekvenciákra vett közelítéseként kaphatjuk meg.

$$I_\nu(T) = \frac{2\nu^2 kT}{c^2} \tag{10}$$

5. Wien közelítés

A Wien közelítést a Planck-függvény rövid hullámhosszakra, illetve nagy frekvenciákra vett közelítéseként kaphatjuk meg.

$$I_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \tag{11}$$



2. ábra. Forrás: Csanád Máté: Atomfizika jegyzet

Feladatok

1. Egy csillagra $\lambda_{\mathrm{max}} = 600\mathrm{nm}$ és $\mathrm{L} = \mathrm{L}_{\odot} = 3,83 \times 10^{26}$ W. Mekkora a hőmérséklete és a sugara?

$$\lambda_{max} \times T = 2897 \times 10^{-6} m\ K \qquad \rightarrow \qquad T = \frac{2897 \times 10^{-6} m\ K}{600 \times 10^{-9}} = 4833\ K$$

$$L = 4\pi R_*^2 \sigma T^4 \qquad \rightarrow \qquad R^2 = \frac{L}{4\pi\sigma T^4} = 9,85 \times 10^{17}\ m$$

2. Hányszor fényesebb a Rigel a Napnál? $\pi = 0,00378$", $\mathrm{m} = 0,34^{\mathrm{m}}$ és $\mathrm{M}_{\mathrm{V},\odot} = 4,83^{\mathrm{m}}$?

$$d = \frac{1}{\pi} = 264,6\ pc$$

$$m - M = -5 + 5\log d = 7,1^m$$

$$M_R = m - 7,1 = -6,76^m$$

$$M_R - M_{\odot} = -11,59^m$$

11,14 magnitúdó a különbség, ennyivel fényesebb a Rigel:

$$m_R - m_{\odot} = -2,5 \log \frac{F_R}{F_{\odot}}$$

$$\frac{-11,59}{-2,5} = 4,636 = \log \frac{F_R}{F_{\odot}} \qquad \rightarrow \qquad \frac{F_R}{F_{\odot}} = 43251$$