

A Carnot-ciklus vizsgálata

Bevezető

A Carnot-ciklus egy körfolyamat, azaz a ciklust végző rendszer a folyamat végén visszatér a kezdeti állapotba. A ciklus során a rendszer egy T_1 hőmérsékletű melegebb, és egy T_2 hőmérsékletű hidegebb hőtartállyal kerül termikus kontaktusba, a folyamat egyéb szakaszai pedig adiabatikusak. Feltételezzük, hogy a folyamat lassú, a rendszer végig egyensúlyi állapotokon keresztül halad, a folyamat megfordítható. *(Elképzelhetünk például egy dugattyús edénybe zárt gázt. Az edényt a folyamat bizonyos szakaszain hőszigetelő anyagba csomagoljuk, a folyamat más szakaszain viszont forró vagy hideg fürdőbe helyezzük.)*

A folyamat négy szakaszból áll:

1. Izotermikus szakasz: a rendszer hőt vesz fel a melegebb hőtartálytól, és közben ugyanakkora mennyiségű pozitív munkát végez. *(A gáz állandó hőmérséklet mellett kitágul.)*
2. Adiabatikus szakasz: a rendszer pozitív munkát végez, belső energiája csökken. *(A gáz hőcsere nélkül tágul, közben lehűl.)*
3. Izotermikus szakasz: a rendszer hőt ad le a hidegebb hőtartálynak, közben ugyanakkora mennyiségű negatív munkát végez. *(A gáz állandó hőmérséklet mellett összehúzódik.)*
4. Adiabatikus szakasz: a rendszer negatív munkát végez, belső energiája megnő. *(A gáz hőcsere nélkül összehúzódik, közben felmelegszik.)*

1. feladat

Írjuk fel a folyamat termodinamikai hatásfokát a gáz maximális és minimális hőmérsékletének (a melegebb és a hidegebb hőtartály hőmérsékletének) segítségével!

Megoldás

A termodinamikai hatásfok a ciklus során a rendszer által elvégzett teljes munka és a környezet által a rendszernek átadott hőmennyiség hányadosa:

$$\eta = \frac{W_{rendszer \rightarrow \text{környezet, teljes}}}{Q_{\text{környezet} \rightarrow \text{rendszer, csak pozitív}}}$$

Pozitív vagy negatív munkavégzés a folyamatnak mind a négy szakaszában történt, hőcsere csak az 1. és 4. szakaszban. Ezek közül az 1. szakasz volt az, amelynek során a környezet adott át hőt a gáznak, így a hatásfokot megadó hányados nevezőjében csak ezt a hőmennyiséget kell figyelembe venni.

A rendszer belső energiájának változása a hőközlésből és a munkavégzésből adódik (1. főtétel):

$$\Delta U_{rendszer} = W_{\text{környezet} \rightarrow \text{rendszer}} + Q_{\text{környezet} \rightarrow \text{rendszer}} = W_{\text{környezet} \rightarrow \text{rendszer}} + T \cdot \Delta S_{rendszer}$$

Mivel a folyamat végén a rendszer visszatér kezdeti állapotába, a teljes ciklusra fennállnak az alábbiak:

$$\begin{aligned}\Delta U_{rendszer} &= 0 \\ W_{\text{környezet} \rightarrow \text{rendszer}} &= -Q_{\text{környezet} \rightarrow \text{rendszer}} \\ W_{rendszer \rightarrow \text{környezet}} &= Q_{\text{környezet} \rightarrow \text{rendszer}} \\ W_{rendszer \rightarrow \text{környezet}} &= T_1 \cdot \Delta S_{rendszer}^{1.\text{szakasz}} + T_2 \cdot \Delta S_{rendszer}^{3.\text{szakasz}}\end{aligned}$$

Az entrópia is állapotjelző, ezért a körfolyamat végén annak értéke is azonos a kezdetivel. Az adiabatikus szakaszokon entrópiaváltozás nincs, így:

$$\begin{aligned}\Delta S_{rendszer} &= 0 \\ \Delta S_{rendszer}^{1.\text{szakasz}} + \Delta S_{rendszer}^{3.\text{szakasz}} &= 0 \\ \Delta S_{rendszer}^{3.\text{szakasz}} &= -\Delta S_{rendszer}^{1.\text{szakasz}}\end{aligned}$$

A rendszer által végzett teljes munka és a környezet által átadott hőmennyiség:

$$W_{rendszer \rightarrow \text{környezet, teljes}} = T_1 \cdot \Delta S_{rendszer}^{1. \text{szakasz}} - T_2 \cdot \Delta S_{rendszer}^{1. \text{szakasz}} = (T_1 - T_2) \cdot \Delta S_{rendszer}^{1. \text{szakasz}}$$

$$Q_{\text{környezet} \rightarrow \text{rendszer, csak pozitív}} = T_1 \cdot \Delta S_{rendszer}^{1. \text{szakasz}}$$

A keresett hatásfok:

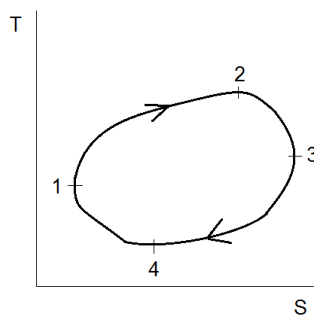
$$\eta = \frac{(T_1 - T_2) \cdot \Delta S_{rendszer}^{1. \text{szakasz}}}{T_1 \cdot \Delta S_{rendszer}^{1. \text{szakasz}}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

2. feladat

Bizonyítsuk be, hogy a Carnot-ciklus hatásfoka maximális a következő értelemben: egy nem Carnot-féle körfolyamat hatásfoka mindig kisebb egy olyan Carnot-ciklus hatásfokánál, amelynek maximális és minimális hőmérséklete a vizsgált körfolyamatéval megegyező!

Megoldás

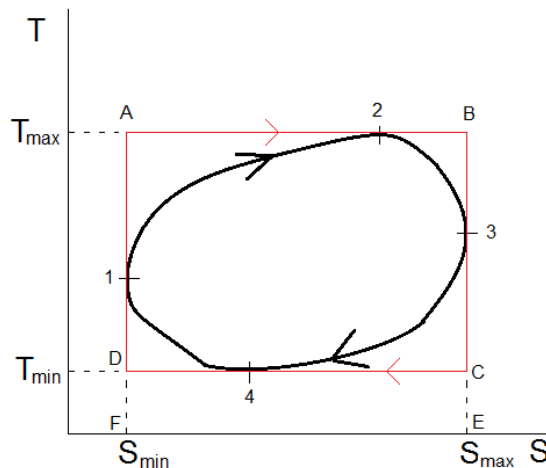
Képzeljünk el egy nem Carnot-féle körfolyamatot, és ábrázoljuk a rendszer állapotváltozását a hőmérséklet-entrópia állapot síkon!



A teljes hőmennyiség, amelyet a rendszer egy ciklus folyamán felvesz (negatív előjellel beleszámítva a leadott hőmennyiséget is) az ábrán szereplő görbe által körbezárt területtel egyenlő (fordított irányú körfolyamat esetén negatív előjellel kellene ellátni). Mivel a rendszer a ciklus végén visszajut a kezdőállapotba, tehát belső energiája helyreáll, ez a hőmennyiség egyenlő a rendszer által elvégzett teljes munkával.

A rendszer által a szó szoros értelmében felvett hő (az, amelyet ténylegesen a környezet ad át neki) a görbe 1→2→3 szakasza alatti terület (ugyanis ez jelöli ki a folyamatnak azon részét, ahol a rendszer entrópiája növekszik).

Vegyük fel ugyanezen az állapot síkon egy olyan Carnot-ciklus görbét, amely ugyanazon hőmérsékleti és entrópia-határok között megy végbe! A Carnot-ciklust ábrázoló görbe a T-S állapot síkon egy téglalap, amely körülvézi a korábbi görbét.



A Carnot-ciklus során a rendszer által végzett teljes munka az ABCD téglalap területével egyenlő, míg a rendszer által a szó szoros értelmében felvett hő az ABEF téglalap területével azonos. A két folyamat hatásfokára fennállnak az alábbiak (T itt a területet jelöli, nem a hőmérsékletet):

$$\eta = \frac{T_{1234}}{T_{123EF}}$$

$$\eta_{Carnot} = \frac{T_{ABCD}}{T_{ABEF}} = \frac{T_{1234} + T_{1A2} + T_{2B3} + T_{3C4} + T_{4D1}}{T_{123EF} + T_{1A2} + T_{2B3}} \geq \frac{T_{1234} + T_{1A2} + T_{2B3}}{T_{123EF} + T_{1A2} + T_{2B3}}$$

A hatásfokok arányára a következő egyenlőtlenség írható:

$$\frac{\eta_{Carnot}}{\eta} \geq \frac{T_{1234} + T_{1A2} + T_{2B3}}{T_{123EF} + T_{1A2} + T_{2B3}} \cdot \frac{T_{123EF}}{T_{1234}} = \frac{1 + \frac{T_{1A2} + T_{2B3}}{T_{1234}}}{1 + \frac{T_{1A2} + T_{2B3}}{T_{123EF}}} \geq \frac{1 + \frac{T_{1A2} + T_{2B3}}{T_{123EF}}}{1 + \frac{T_{1A2} + T_{2B3}}{T_{123EF}}} = 1$$

A két hatásfok hányadosa tehát 1 vagy annál nagyobb. A hányados csak akkor lehetne 1, ha az ábrán szereplő 1A2 stb. „sarkok” mindegyik nulla területű, vagyis a vizsgált ciklus maga is Carnot-körfolyamat lenne. A Carnot-ciklus hatásfoka tehát nagyobb, mint az ugyanolyan hőmérsékleti határok között végbemenő más körfolyamaté.