A Hamilton-formalizmus dióhéjban (véges szabadsági fokú rendszerekre)

Bevezető

A mechanikai rendszerek a Lagrange-függvény helyett egy másik, szintén $2f$ változós függvénnyel, a Hamilton-függvénnyel is jellemezhetők. (Az „explicite időfüggő” rendszerek esetén a változók száma $2f+1$, de ezeket ezúttal is mellőzzük). Az alábbiakban röviden tisztázzuk, hogyan konstuálható meg a Hamilton-függvény, és hogyan származtathatók belőle a rendszer mozgásegyenletei.

A vizsgált rendszerünk Lagrange-függvényének az általánosított sebességek szerinti parciális deriváltjait a rendszer *általánosított impulzusainak* hívják (mert ezek egyes esetekben megegyeznek a „szokásos” impulzusok komponenseivel). A p_i általánosított impulzus definíciós egyenlete tehát:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Tegyük fel, hogy a Lagrange-függvény hozzárendelési utasításában szereplő $\dot{q}_i$ általánosított sebességeket ki tudjuk fejezni az általánosított impulzusok és koordináták segítségével! A matematikai inga példájában ez így fest:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m \cdot l^2 \cdot \dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{p}{m \cdot l^2}$$

Azt is szokták mondani, hogy a p_i mennyiség a q_i koordinátához társított *kanonikus impulzus*. Az általánosított koordináták és a kanonikus impulzusok értékei együttesen ugyanúgy meghatározzák a vizsgált rendszer állapotát, mint a koordináták és a sebességek értékei.

A rendszer Hamilton-függvényének $2f$ változója az f számú koordináta és az f számú impulzus, a függvényérték pedig az alábbi:

$$H(p,q) = \sum_{i=1}^{f} p_i \cdot \dot{q}_i - L(q,\dot{q})$$

A fenti hozzárendelési utasítást úgy tudjuk teljesen explicitté tenni, ha az összes általánosított sebességet kifejezzük a koordináták és az impulzusok segítségével. A matematikai inga példáján:

$$L = \tfrac{1}{2} m \cdot l^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + m \cdot g \cdot l \cdot cos\varphi = \frac{p^2}{2m \cdot l^2} + m \cdot g \cdot l \cdot cos\varphi$$

$$p \cdot \dot{\varphi} = p \cdot \frac{p}{m \cdot l^2} = \frac{p^2}{m \cdot l^2}$$

$$H(p,\varphi) = p \cdot \dot{\varphi} - L(\varphi,\dot{\varphi}) = \frac{p^2}{m \cdot l^2} - \left(\frac{p^2}{2m \cdot l^2} + m \cdot g \cdot l \cdot cos\varphi\right) = \frac{p^2}{2m \cdot l^2} - m \cdot g \cdot l \cdot cos\varphi$$

A Hamilton-függvény segítségével $2f$ differenciálegyenletet írhatunk fel, melyek együttesen meghatározzák a rendszer mozgását. Az egyenletek elsőrendűek, mindegyikük valamelyik kanonikus koordináta vagy impulzus időderiváltját adja meg a koordináták és impulzusok értékének függvényében. (Ha a Hamilton-függvénynek időváltozója is van, akkor ez is megjelenik az egyenletekben.) Ezeket az egyenleteket úgy képezhetjük, hogy az alábbi egyenletekbe beírjuk a Hamilton-függvény kifejezését:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

A fenti egyenleteket *kanonikus egyenleteknek* szokták nevezni. Ha a matematikai inga példájára alkalmazzuk őket, a következőt kapjuk:

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{p^2}{2m \cdot l^2} - m \cdot g \cdot l \cdot cos\varphi\right) = \frac{p}{m \cdot l^2}$$
$$\dot{p} = -\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{p^2}{2m \cdot l^2} - m \cdot g \cdot l \cdot cos\varphi\right) = -m \cdot g \cdot l \cdot sin\varphi$$

Ha a Hamilton-függvény explicite nem függ az időtől, akkor a Hamilton-függvény értéke mozgásállandó, ami a kanonikus egyenletek alapján könnyen igazolható:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_i} \cdot \frac{dq_i}{dt}\right) = \sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i\right) = \sum_{i=1}^{f}\left(-\frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i}\right) = 0$$

Ha emellett az is teljesül, hogy a potenciál csak az általánosított koordinátáktól függ, és a rendszer egyes konfigurációihoz társított általánosított koordináták explicite időfüggetlenek (azaz egy adott konfigurációhoz mindig ugyanazok az általánosított koordináták tartoznak), akkor a Hamilton-függvény értéke a rendszer teljes mechanikai energiájával egyenlő: $H(p,q) = E_k(p,q) + E_p(q)$. A Hamilton-függvényt tehát az ilyen esetekben úgy is megkonstruálhatjuk, hogy a teljes mechanikai energia kifejezésében szereplő általánosított sebességeket kifejezzük az általánosított impulzusok és koordináták segítségével.

A vizsgált rendszer pillanatnyi állapotát meghatározza a q_i, p_i $(i = 1,2 \dots f)$ koordináták és impulzusok pillanatnyi értéke. A Hamilton-formalizmus részeként ezért bevezetik a *fázistér* fogalmát. A fázistér egy $2f$ dimenziós sokaság, amelynek minden pontja a rendszer egy-egy állapotát reprezentálja. A fázistér egy adott pontjának koordinátái a $q_1, q_2 \dots q_f$ általánosított koordináták és a $p_1, p_2 \dots p_f$ általánosított impulzusok. A Hamilton-függvény a fázistér pontjaihoz rendel valós számokat (az energia mértékegységével ellátva).

A kanonikus egyenletek határozzák meg, hogyan változnak a rendszer állapotát jellemző koordináták és impulzusok az idő függvényében, azaz hogyan mozog a rendszert reprezentáló pont a fázistérben. Azt a görbét, amelyet a rendszert képviselő pont a fázistérben leír, a rendszer *fázistrajektóriájának* szokás nevezni. Ha a Hamilton-függvény explicite nem függ az időtől, akkor értéke mozgásállandó, így tetszőleges fázistrajektória egy olyan $(2f-1)$-dimenziós hiperfelület mentén helyezkedik el, amelyen H értéke állandó (a $H(p,q) = const.$ egyenletű hiperfelületeket H szintfelületeinek nevezhetjük).

Feladat: Egy M tömegű, R sugarú, mindenütt egyforma sűrűségű tömör henger csúszásmentesen gurul egy α meredekségű, végtelen hosszú lejtőn a g gyorsulású homogén nehézségi erőtérben. A henger szimmetriatengelye mindvégig vízszintesen helyezkedik el. Írjuk fel a henger Hamilton-féle mozgásegyenleteit úgy, hogy általánosított koordinátának a henger φ elfordulását választjuk (valamilyen önkényesen megválasztott szöghöz képest)! Oldjuk is meg a mozgásegyenleteket! Ábrázoljuk a rendszer fázistrajektóriáit!