A Lagrange-formalizmus dióhéjban (véges szabadsági fokú rendszerekre)

Bevezető

Ha egy kölcsönható tömegpontokból és/vagy merev testekből álló mechanikai rendszer mozgását vizsgáljuk, sokszor már az is igen nehézkesen megy, hogy a mozgásegyenleteket Newton II. axiómájának közvetlen alkalmazásával felírjuk. Főképp akkor, ha a rendszer egyes tagjai bizonyos kényszereknek vannak alávetve, például csak meghatározott görbék vagy felületek mentén mozoghatnak. Több nehézség illetve kényelmetlenség is fellép:

1. A kényszerek figyelembevételéhez „kényszererőket” kell bevezetni, amelyek a kényszereknek alávetett testekre hatnak, hogy biztosítsák az előírt görbén vagy felületen maradásukat. Az egyes kényszererők komponensei a hely- és sebességkoordinátáktól függnek, és ezeket a függvényeket nekünk kell megkonstruálnunk.
2. A kényszerek ugyan csökkentik a rendszer szabadsági fokainak számát, mégis kénytelenek vagyunk annyi mozgásegyenletet felírni, ahány szabadsági fok kényszer nélkül lenne.

Példaképpen képzeljünk el egy átfúrt gyöngyszemet, amelyet egy merev, girbegurba drótra fűztünk fel, és azt vizsgáljuk, hogyan mozog a gyöngyszem a drót mentén a föld nehézségi erőterében, miután elengedtük. Ha közvetlenül Newton II. axiómája segítségével akarjuk megadni a gyöngyszem mozgásegyenleteit, akkor három mozgásegyenletet kell felírnunk ($m \cdot \ddot{x} = K_x, m \cdot \ddot{y} = K_y, m \cdot \ddot{z} = K_z - m \cdot g$), majd vesződhetünk azzal, hogy a drót által kifejtett „kényszererő” K_x, K_y, K_z komponenseit megadjuk a koordináták és azok időderiváltjai segítségével.

Az ilyen esetekben sokkal egyszerűbb, ha az ún. Lagrange-formalizmus segítségével írjuk fel a mozgásegyenleteket. Főleg akkor, ha elhanyagolhatók a rendszerben fellépő disszipatív erők (a dróton csúszó gyöngyszem esetében pl. a drót és a gyöngyszem között fellépő súrlódás).

Az első lépés most az, hogy bevezetünk annyi „általánosított” helykoordinátát, ahány szabadsági fokú a vizsgált rendszer. A dróton csúszó gyöngyszem 1 szabadsági fokú, és az általánosított helykoordináta lehet pl. a drót egy kiválasztott pontja és a gyöngyszem helye közötti drótszakasz (előjellel ellátott) hossza. A gömbinga (plafonra kötött zsinór végére rögzített pontszerű nehezék, amely (fél)gömbfelületen mozoghat) 2 szabadsági fokú. A két általánosított helykoordináta lehet egy-egy szög, amely megadja a nehezék helyét a gömbfelületen, a földrajzi hosszúsághoz és szélességhez hasonlóan. Az általánosított helykoordinátákat önkényesen választhatjuk, és többnyire célszerű a kényszerekhez „jól illeszkedő” koordinátákat választani.

A következő lépés, hogy a rendszer kinetikus és potenciális energiáját kifejezzük az általánosított helykoordináták és azok idő szerinti deriváltjai – az általánosított sebességek – segítségével. Legyen most a példánk a matematikai inga, amely abban különbözik a gömbingától, hogy egy előírt síkban végez lengéseket. A helykoordináta lehet az inga függőlegeshez képesti kitérésének φ szöge! Az ehhez tartozó általánosított sebesség $\dot{\varphi}$. A nehezék „közönséges” sebessége $v = l \cdot \dot{\varphi}$, kinetikus energiája $E_k = \frac{1}{2}m \cdot v^2 = \frac{1}{2}m \cdot l^2 \cdot \dot{\varphi}^2$. (Itt l a fonál hossza, m a nehezék tömege.) A potenciális energia „nulla” szintjét jelölje ki a plafon, amelyhez a zsinórt rögzítettük! Ekkor a potenciális energia $E_p = m \cdot g \cdot h = -m \cdot g \cdot l \cdot cos\varphi$.

Ezek után felírhatjuk a rendszer ún. Lagrange-függvényét. Ennek a függvénynek a változói az általánosított koordináták és sebességek (ezek együtteséhez rendel egy energia dimenziójú valós számértéket), azaz a változók száma a rendszer szabadsági fokai számának kétszerese. (Egy további változó lehet az idő is, de ezt az esetet itt nem vizsgáljuk.) A Lagrange-függvény értéke a kinetikus és a potenciális energia különbségével egyenlő, azaz $L(q, \dot{q}) = E_k(q, \dot{q}) - E_p(q, \dot{q})$ (itt q és $\dot{q}$ az általánosított koordináták és sebességek együttesét jelöli.) A matematikai inga esetében $L(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m \cdot l^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + m \cdot g \cdot l \cdot cos\varphi$.

Az utolsó lépés van hátra ahhoz, hogy eljussunk a mozgásegyenletekhez. Ez abban áll, hogy a Lagrange-függvény kifejezését beírjuk az alábbi egyenletekbe:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Ezeket az egyenleteket Euler-Lagrange-egyenleteknek hívják, és annyi van belőlük, ahány szabadsági fokkal rendelkezik a rendszer. (A q_i mennyiségek jelölik az egyes általánosított koordinátákat, a $\dot{q}_i$ mennyiségek pedig az általánosított sebességeket. Az i index az 1,2 … f értékeket veszi fel, ahol f a rendszer szabadsági fokainak száma.) A matematikai inga esetében egyetlen egyenletünk lesz, amelyet a következő lépésekkel konstruálhatunk meg:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}\left(\frac{1}{2}m \cdot l^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + m \cdot g \cdot l \cdot cos\varphi\right) = m \cdot l^2 \cdot \dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt}(m \cdot l^2 \cdot \dot{\varphi}) = m \cdot l^2 \cdot \ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{2}m \cdot l^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + m \cdot g \cdot l \cdot cos\varphi\right) = -m \cdot g \cdot l \cdot sin\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = m \cdot l^2 \cdot \ddot{\varphi} + m \cdot g \cdot l \cdot sin\varphi = 0$$

Ebből egyszerűsítés után ennyi marad:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \cdot sin\varphi = 0$$

Feladat: Egy szánkó súrlódásmentesen csúszik le egy lejtőn. A szánkó síkmozgást végez az $y = e^{-x}$ egyenletű görbe mentén (az y-tengely függőlegesen felfelé mutat, az x-tengely vízszintes, a távolságokat dimenziótlanítottuk). Írjuk fel a szánkó mozgásegyenletét úgy, hogy „általánosított” koordinátának egyszerűen az x Descartes-koordinátát választjuk!