A Liouville-tétel

Tegyük fel, hogy egy f szabadsági fokú mechanikai rendszer jellemezhető a $H(q_1, \dots q_f, p_1, \dots p_f, t)$ Hamilton-függvénnyel! Jelöljünk ki a fázistérben egy tetszőleges $2f$-dimenziós tartományt! A tartományt alkotó pontok mindegyike a vizsgált mechanikai rendszer egy-egy pillanatnyi állapotának felelnek meg. A rendszer mozgása a megfelelő pont fázistérbeli mozgásának felel meg. A vizsgált tartományt alkotó pontok tehát mozognak a fázistérben, így a belőlük álló tartomány is mozog és változtatja alakját. Liouville tétele azt állítja, hogy eközben a kérdéses tartomány $2f$-dimenziós térfogata (a „fázistérfogat") állandó.

A Liouville-tétel más formában is kifejezhető. Ezt mutatjuk be az alábbiakban.

Tegyük fel, hogy a vizsgált rendszer sok-sok példányát vizsgáljuk! Egy adott pillanatban az egyes rendszerek a fázistér egy-egy pontjában tartózkodnak. Ha sok rendszerünk van, akkor az egyes rendszerekhez tartozó fázispontok sűrűn pettyezik tele a fázisteret. Ekkor bevezethetünk egy $\rho(q_1, \dots q_f, p_1, \dots p_f, t)$ „fázissűrűség-függvényt", amelynek valamely t pillanatban a fázistér tetszőleges $2f$-dimenziós tartományára vett $\int \rho(q_1, \dots q_f, p_1, \dots p_f, t) dq_1 \dots dq_f dp_1 \dots dp_f$ integrálja azon rendszerek számát adja meg, amelyeknek fázispontja a t pillanatban a tartományon belül található. (A „tetszőleges" tartomány, amelyre integrálunk, azért legyen elég nagy ahhoz, hogy sok rendszer fázispontját tartalmazza!)

A fázistér pontjainak mozgását meghatározzák a kanonikus egyenletek. Adott t pillanatban a fázistér minden pontjához hozzárendelhetünk egy $2f$-komponensű „fázissebesség-vektort", amely jellemzi az adott fázispontban az adott pillanatban tartózkodó rendszer pillanatnyi mozgását a fázistérben. (Ha a Hamilton-függvény az időtől explicite nem függ, akkor a „fázissebesség" a fázistér adott pontjában mindig ugyanaz, azaz a fázistérbeli „fázissebesség-mező" időben állandó.) A fázissebesség komponensekkel kiírva:

$$\boldsymbol{v} = \left(\dot{q}_1, \dots \dot{q}_f, \dot{p}_1, \dots \dot{p}_f\right)$$

A kanonikus egyenletek felhasználásával a fázissebesség így is felírható:

$$\boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots \frac{\partial H}{\partial p_f}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots -\frac{\partial H}{\partial q_f}\right)$$

Kiszámítjuk a fázissebesség-mező divergenciáját:

$$div\boldsymbol{v} = \frac{\partial v_1}{\partial q_1} + \frac{\partial v_2}{\partial q_2} + \dots + \frac{\partial v_f}{\partial q_f} + \frac{\partial v_{f+1}}{\partial p_1} + \frac{\partial v_{f+2}}{\partial p_2} + \dots + \frac{\partial v_{2f}}{\partial p_f} =$$
$$= \frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_f} + \dots + \frac{\partial^2 H}{\partial q_f \partial p_f} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial q_1} - \dots \frac{\partial^2 H}{\partial p_f \partial q_f}$$

A kapott kifejezésben szereplő vegyes parciális deriváltak páronként kiejtik egymást, tehát a fázissebesség-mező divergenciamentes:

$$div\boldsymbol{v} = 0$$

Térjünk vissza a sok-sok egyforma felépítésű (azonos Hamilton-függvénnyel rendelkező) rendszerünkhöz, melyek fázispontjainak mozgását nyomon követjük! Jelöljünk ki a fázistérben egy $2f$-dimenziós tartományt! Ha a tartományt úgy rögzítjük, hogy időtől független legyen (a határai nem mozdulnak), akkor a benne lévő rendszerek száma az idő előrehaladtával csak a határokon való ki- és belépés révén változhat meg. A tartomány határának $d\boldsymbol{A}$ normálisú (kifelé irányított) kis felületelemén időegység alatt áthaladó rendszerek száma $\rho \cdot \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{A}$ (itt ρ és $\boldsymbol{v}$ a fázissűrűségnek ill. a fázissebességnek a felületelem mentén vett értékét jelöli). A tartomány egészében lévő fázispontok számának változási rátája:

$$\frac{d}{dt} \int \rho dq_1 \dots dq_f dp_1 \dots dp_f = -\oint \rho \cdot \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{A}$$

(Az egyenlet jobb oldalán a vizsgált tartomány határolófelületére – egy $2f - 1$ dimenziós „hiperfelületre" – vett integrál szerepel. A negatív előjelet az teszi szükségessé, hogy a felületelemek kifelé vannak irányítva, így maga az integrál akkor pozitív, ha a fázispontok kiáramlása nagyobb a beáramlásnál.)

Az egyenlet bal oldalán az idő szerinti deriválás bevihető az integráljel alá, mert az integrálási tartomány határai időtől függetlenek. A túloldalon álló felületi integrál pedig a Gauss-Osztrogradszkij-tétel segítségével térfogati integrállá alakítható át:

$$\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dq_1 \dots dq_f dp_1 \dots dp_f = \int -div(\rho \cdot \boldsymbol{v}) dq_1 \dots dq_f dp_1 \dots dp_f$$

Az egyenlőség tetszőleges tartományra teljesül, ami csak akkor lehetséges, ha maguk az integrandusok is megegyeznek:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -div(\rho \cdot \boldsymbol{v})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \cdot \boldsymbol{v}) = 0$$

Ez nem más, mint a fázissűrűség kontinuitási egyenlete.

Most megvizsgáljuk a fázissűrűség „teljes időderiváltját”. Ez annyit tesz, hogy követjük a sok-sok rendszerünk egyikét, ahogyan az mozog a fázistérben, és a fázissűrűség-függvénynek a rendszer mindenkori helyén felvett értékeit hasonlítjük össze. A rendszer fázistérbeli koordinátái dt idő alatt $dq_1, \dots dq_f, dp_1, \dots dp_f$ értékekkel változnak meg. A fázissűrűség értékének megváltozása:

$$d\rho = \rho\big(q_1 + dq_1, \dots q_f + dq_f, p_1 + dp_1, \dots p_f + dp_f, t + dt\big) - \rho(q_1, \dots q_f, p_1, \dots p_f, t)$$

Ha $dq_1, \dots dq_f, dp_1, \dots dp_f, dt$ kicsik, ehelyett a következő írható:

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial q_1} dq_1 + \dots + \frac{\partial \rho}{\partial q_f} dq_f + \frac{\partial \rho}{\partial p_1} dp_1 + \dots + \frac{\partial \rho}{\partial p_f} dp_f + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt$$

A fenti egyenletet dt-vel osztva az alábbit kapjuk:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial \rho}{\partial q_f} \dot{q}_f + \frac{\partial \rho}{\partial p_1} \dot{p}_1 + \dots + \frac{\partial \rho}{\partial p_f} \dot{p}_f + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Ez az egyenlet az alábbi formára írható át:

$$\frac{d\rho}{dt} = grad\rho \cdot \boldsymbol{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

A kontinuitási egyenlet szerint $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -div(\rho \cdot \boldsymbol{v})$. Ezzel a most felírt egyenletünket tovább alakíthatjuk:

$$\frac{d\rho}{dt} = grad\rho \cdot \boldsymbol{v} - div(\rho \cdot \boldsymbol{v})$$

A szorzatfüggvény deriválási szabálya alapján $div(\rho \cdot \boldsymbol{v}) = grad\rho \cdot \boldsymbol{v} + \rho \cdot div\boldsymbol{v}$, így:

$$\frac{d\rho}{dt} = grad\rho \cdot \boldsymbol{v} - grad\rho \cdot \boldsymbol{v} - \rho \cdot div\boldsymbol{v}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \cdot div(\boldsymbol{v})$$

Korábban már láttuk, hogy a fázissebesség-mező divergenciamentes, tehát végül is ezt kapjuk:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0$$

Ez a Liouville-tétel egy másik formában kimondva. Szavakban így foglalható össze: az egyes rendszerek úgy vándorolnak a fázistérben, hogy közben a fázissűrűséget „magukkal viszik”.

Megjegyzések:

1) Érdemes hangsúlyozni, hogy a Liouville-tétel általában érvényét veszíti akkor, ha a fázistér helyett mondjuk a q_i általánosított koordináták és a $\dot{q}_i$ általánosított sebességek $2f$-dimenziós „terét" használjuk. Noha ebben a térben is egyértelműen megfelel a rendszer tetszőleges állapota egy pontnak, és e pont mozgása is egyértelműen leírható, itt már időben változhat a mozgó pontok által kijelölt tartományok térfogata. A fázissebesség divergenciamentessége ugyanis a kanonikus egyenletek következménye, és ezekkel analóg egyenletek a q_i-k és $\dot{q}_i$-ok időderiváltjaira általában nem írhatók fel.

2) Ha a Hamilton-függvény explicite nem függ az időtől, akkor mozgásállandó. A Hamilton-függvény egyes függvényértékei $2f-1$ dimenziós hiperfelületeket jelölnek ki a fázistérben: egy-egy ilyen hiperfelület mentén a Hamilton-függvény értéke állandó. Egy explicite időfüggetlen Hamilton-függvénynek ezek a „szintfelületei" időtől függetlenek. Minden rendszer fázistrajektóriája egy-egy ilyen szintfelületen halad. Ha a sok-sok rendszerünket úgy szórtuk szét a fázistérben, hogy Hamilton-függvényük értéke a kezdőpillanatban valamilyen H_1 és H_2 értékek közé esik, és a megfelelő szintfelületek közötti tartományt egyenletesen töltik ki (azaz e tartományon belül ρ értéke állandó, a tartományon kívül pedig nulla), akkor a fázissűrűség-függvény időben állandó lesz. Az egyes rendszerek fázispontjai vándorolnak, de mindenhová ugyanazt a ρ-értéket „viszik magukkal", ami már azelőtt is ott volt. Az egyes rendszerek fázispontjai a tartomány semelyik részén nem fognak sem „összesűrűsödni", sem „megritkulni".