Termodinamikai tárgyú feladatok

Feladat: Határozzuk meg az ideális gáz adiabatáinak egyenletét a $p-T$ állapotsíkon!

Megoldás:

Az ideális gáz termikus és kalorikus állapotegyenlete:

$$pV = nRT$$
$$U = \frac{f}{2}pV = \frac{f}{2}nRT$$

Ideális gáz adiabatikus állapotváltozására ($\delta Q = 0$) a következők írhatók fel:

$$dU = \delta W = -pdV$$
$$d\left(\frac{f}{2}nRT\right) = -pd\left(\frac{nRT}{p}\right)$$

$$\frac{f}{2}nRdT = -p\left(-\frac{nRT}{p^2}dp\right) - p\frac{nR}{p}dT$$

$$\frac{f}{2}nRdT = \frac{nRT}{p}dp - nRdT$$

$$\frac{f}{2}dT = \frac{T}{p}dp - dT$$

$$\frac{f+2}{2}dT = \frac{T}{p}dp$$

$$\frac{f+2}{2}\frac{dT}{T} = \frac{dp}{p}$$

Integráljuk az egyenlet két oldalát! Ha a rendszer kezdeti állapotához tartozó mennyiségeket 1 indexszel, a végállapothoz tartozó mennyiségeket 2 indexszel látjuk el, a következőt kapjuk:

$$\frac{f+2}{2}ln\frac{T_2}{T_1} = ln\frac{p_2}{p_1}$$

$$ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{f+2}{2}} = ln\frac{p_2}{p_1}$$

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{f+2}{2}} = \frac{p_2}{p_1}$$
$$p_1 \cdot T_1^{-\frac{f+2}{2}} = p_2 \cdot T_2^{-\frac{f+2}{2}}$$

Az adiabaták egyenlete tehát így írható:

$$p \cdot T^{-\frac{f+2}{2}} = const.$$

A fenti kifejezésben szereplő kitevőt felírhatjuk a $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{f+2}{f}$ fajhőhányados segítségével:

$$-\frac{f+2}{2} = -\frac{f+2}{f}\cdot\frac{f}{2} = -\frac{f+2}{f}\cdot\left(\frac{2}{f}\right)^{-1} = -\frac{f+2}{f}\cdot\left(\frac{f+2}{f}-1\right)^{-1} = -\frac{\gamma}{\gamma-1}$$

Így az adiabaták egyenlete így is felírható:

$$p \cdot T^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} = const.$$

Feladat: Magyarázzuk meg, miért csökken a troposzférában a levegő hőmérséklete a magasság növekedésével! Becsüljük meg a hőmérsékletgradiens nagyságát azzal a feltevéssel, hogy a levegő ideális gáznak tekinthető!

Megoldás:

Miközben egy légtömeg felemelkedik, a környezettel hővezetés révén végbemenő hőcseréje elhanyagolható, mert a levegő rossz hővezető. A felemelkedő légtömegek nyomása csökken, és adiabatikusan kitágulnak, eközben lehűlnek. Az előző feladat eredménye alapján az emelkedő légtömegre a következő írható fel:

$$d\left(p \cdot T^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right) = 0$$
$$dp \cdot T^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} - p\frac{\gamma}{\gamma-1}T^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}-1}dT = 0$$

Egyszerűsítés és átrendezés után ebből a következőt kapjuk:

$$\frac{dp}{p} - \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{dT}{T} = 0 \quad (*)$$

A légkör lassú áramlása esetén (precízebben: ha a légtömegek gyorsulása kicsi) az atmoszféra mindvégig közel van a mechanikai egyensúly állapotához, azaz közelítőleg fennáll, hogy a nyomásgradiensből származó tartóerő kiegyenlíti a gravitációs erőt:

$$\frac{dp}{dh} = -\rho \cdot g$$
$$dp = -\rho \cdot g \cdot dh \quad (**)$$

A (**) egyenletben szereplő kifejezést a (*) egyenletbe beírva ezt kapjuk:

$$-\frac{\rho}{p}g \cdot dh - \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{dT}{T} = 0 \quad (***)$$

Az ideális gáz állapotegyenlete felírható az alábbi formában (M a moláris tömeget jelöli):

$$p = \frac{n}{V}RT = \frac{\frac{m}{M}}{V}RT = \frac{m}{V}\frac{1}{M}RT = \frac{\rho}{M}RT$$

Ennek alapján a ρ/p hányados így írható:

$$\frac{\rho}{p} = \frac{M}{RT}$$

A kapott kifejezést beírjuk a (***) egyenletbe:

$$-\frac{M}{RT}g \cdot dh - \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{dT}{T} = 0$$
$$\frac{Mg}{R}dh + \frac{\gamma}{\gamma-1}dT = 0$$

Ebből a dT/dh hányados, azaz a hőmérsékletgradiens meghatározható:

$$\frac{dT}{dh} = -\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{Mg}{R} \quad (****)$$

Az eredményünk szerint a hőmérsékletgradiens a magasságtól független.

A levegő moláris tömege $M \approx 0.029\frac{kg}{mol}$. A levegő legnagyobbrészt kétatomos molekulákból (N_2, O_2) áll, így γ fajhőhányadosa:

$$\gamma = \frac{f+2}{f} = \frac{5+2}{5} = 1.4$$

Ezeket az adatokat a (****) egyenletbe helyettesítve a hőmérsékletgradiensre a következőt kapjuk:

$$\frac{dT}{dh} \approx -0.01\frac{K}{m}$$

Ez a mérhető értéknek körülbelül a kétszerese. Az eltérés fő oka az, hogy nem vettük figyelembe a levegőben jelen lévő vízpárát. A pára egy része a felemelkedő légtömegből kicsapódik, így a halmazállapot-változás látens hője mérsékli a hőmérsékletcsökkenést.

Feladat: Egy edényben T hőmérsékletű és p_g nyomású atomos ideális gáz és azzal egyensúlyban lévő hőmérsékleti sugárzás van jelen. Határozzuk meg, hogyan aránylik a sugárzás $C_{V,s}$ hőkapacitása a gáz $C_{V,g}$ hőkapacitásához! Mekkora ez az arány, ha a hőmérséklet $T = 300\ K$, a gáznyomás $p_g = 10^5\ Pa$?

Megoldás:

A gázatomok szabasági fokainak száma $f = 3$, így a gáz $C_{V,g}$ hőkapacitása:

$$C_{V,g} = \left(\frac{\partial U_g}{\partial T}\right)_V = \frac{3}{2}nR = \frac{3p_gV}{2T}$$

A hőmérsékleti sugárzás belső energiája:

$$U = aT^4V$$

Itt $a = \frac{4\sigma}{c} \approx 7.565 \cdot 10^{-16}\frac{J}{m^3K^4}$. Így a sugárzás $C_{V,s}$ hőkapacitása:

$$C_{V,s} = \left(\frac{\partial U_s}{\partial T}\right)_V = 4aT^3V$$

A két hőkapacitás hányadosa:

$$\frac{C_{V,s}}{C_{V,g}} = \frac{4aT^3V}{\frac{3p_gV}{2T}} = \frac{8aT^4}{3p_g}$$

Megjegyezhetjük, hogy a hányados állandó gázsűrűség esetén T^3-nal arányos, mert a nevezőben szereplő gáznyomás maga T-vel arányos.

Ha $T = 300\ K$ és $p_g = 10^5\ Pa$, akkor a kapott hányados:

$$\frac{C_{V,s}}{C_{V,g}} \approx 1.63 \cdot 10^{-10}$$

Látható, hogy normál légköri nyomás és szobahőmérséklet környékén a hőmérsékleti sugárzásnak a C_V fajhőhöz adott járuléka figyelmen kívül hagyható. Hasonló mondható el a sugárnyomásnak a teljes nyomáshoz adott járulékáról is. Csillagok magjában azonban a helyzet egészen más lehet.